MATEMATIKA

OBSAH:

1 ZÁKLADNÍ POZNATKY Z MATEMATICKÉ LOGIKY A TEORIE MNOŽIN ... 1
2 MATEMATICKÉ DŮKAZY ... 2
3 MOCNINY A ODMOCNINY, MOCNINNÉ FUNKCE ... 3
4 ÚPRAVY ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ ... 3
5 FUNKCE A JEJICH ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI ... 4
6 LINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FUNKCE ... 4
7 LINEÁRNÍ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU ... 5
8 KVADRATICKÉ ROVNICE A NEROVNICE ... 6
9 VZTAHY MEZI KOŘENY A KOEFICIENTY KVADRATICKÉ ROVNICE ... 6
10 IRACIONÁLNÍ ROVNICE ... 7
11 KOMPLEXNÍ ČÍSLA ... 7
12 ŘEŠENÍ ROVNIC V OBORU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL ... 8
13 ROVNICE S PARAMETREM ... 8
14 SOUSTAVY ROVNIC A NEROVNIC ... 8
15 EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ FUNKCE ... 9
16 EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE A NEROVNICE ... 10
17 LOGARITMICKÉ ROVNICE A NEROVNICE ... 11
18 GONIOMETRICKÉ FUNKCE ... 11
19 VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI ... 12
20 GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE ... 13
21 TRIGONOMETRIE ... 14
22 SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ ... 14
23 PODOBNOST A STEJNOLEHLOST ... 14
24 PYTHAGOROVA VĚTA, EUKLIDOVY VĚTY ... 14
25 ROVINNÉ ÚTVARY ... 15
26 NEROTAČNÍ TĚLESA ... 15
27 ROTAČNÍ TĚLESA ... 16
28 MATICE A DETERMINANTY ... 16
29 LINEÁRNÍ ALGEBRA ... 17
30 VEKTORY ... 18
31 ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V ROVINĚ ... 18
32 ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V PROSTORU ... 19
33 POLOHOVÉ A METRICKÉ VZTAHY ÚTVARŮ V ROVINĚ ... 20
34 POLOHOVÉ A METRICKÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU ... 20
35 ANALYTICKÁ GEOMETRIE KRUŽNICE A ELIPSY ... 21
36 ANALYTICKÁ GEOMETRIE PARABOLY ... 22
37 ANALYTICKÁ GEOMETRIE HYPERBOLY ... 22
38 VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A KUŽELOSEČKY ... 22
39 VARIACE A PERMUTACE ... 23
40 KOMBINACE ... 23
41 ZÁKLADY PRAVDĚPODOBNOSTI ... 24
42 ZÁKLADY STATISTIKY ... 25
43 ARITMETICKÁ POSLOUPNOST ... 26
44 GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST ... 26
45 ŘADY ... 26
46 LIMITA, SPOJITOST A DERIVACE FUNKCE ... 27
47 GEOMETRICKÝ A FYZIKÁLNÍ VÝZNAM DERIVACE ... 29
48 VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE ... 29
49 PRIMITIVNÍ FUNKCE, URČITÝ INTEGRÁL ... 31
50 UŽITÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU K VÝPOČTU OBSAHŮ ROVINNÝCH OBRAZCŮ A OBJEMŮ ROTAČNÍCH TĚLES ... 33

1 ZÁKLADNÍ POZNATKY Z MATEMATICKÉ LOGIKY A TEORIE MNOŽIN

Výrok (p): Každé sdělení, o kterém můžeme rozhodnout, zda je či není pravdivé. Je-li výrok pravdivý, přiřazujeme mu 1. Není-li pravdivý, přiřazujeme mu 0.

Negace výroku (p'): tvoříme ji pomocí „není pravda, že“ nebo „neplatí, že“.

1.1 LOGICKÉ SPOJKY

Konjunkce ($p \wedge q$): „a“, „i“, „a zároveň“ – je pravdivá, když jsou pravdivé oba výroky

Disjunkce (alternativa) **($p \vee q$):** „nebo“ – je pravdivá, je-li pravdivý alespoň 1 výrok

Implikace ($p \Rightarrow q$): „jestliže …, pak“ – není pravdivá jen tehdy, vyplývá-li z pravdy nepravda

Ekvivalence (oboustranná implikace) **($p \Leftrightarrow q$):** „…právě tehdy, když …“ – je pravdivá, mají-li oba výroky stejnou pravdivostní hodnotu

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	1	**0**	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	**0**	1	**1**

1.2 KVANTIFIKOVANÉ VÝROKY

Obecný kvantifikátor ($\forall$): „V každém…“, „Pro každé…“ – např. $\forall x \in R; (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Existenční kvantifikátor ($\exists$): „Existuje…“ – např. $\exists x \in R; x < 0$

1.3 DEFINICE, VĚTY

Definice: zavádí základní matematické pojmy

Věty: musíme je na rozdíl od definic dokázat. Skládají se z **předpokladu** a **tvrzení**. Např. $\forall a \in Z^+; a =$ liché č. $\Rightarrow a^2 =$ liché č. – předpoklad: celé kladné liché č. – tvrzení: a^2 je liché č.

$q' \Rightarrow p'$ věta obměněná $p \Rightarrow q$

1.4 MNOŽINY

Množina (A,B,…**):** soubor určitých prvků – konečná (žáci), nekonečná (R), prázdná ({})

Určení množin: výčtem ($A = \{a, b, c, d\}$), symbolicky ($A = \{x \in N; 10 < x \le 20\}$)

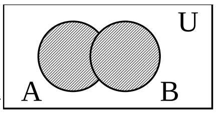
1.5 VZTAHY MEZI MNOŽINAMI

Podmnožina ($A \subset B$): „A je podmnožinou B“ – inkluze – def. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A; x \in B$

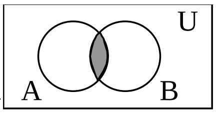
Rovnost ($A = B$): def. $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

1.6 OPERACE MEZI MNOŽINAMI

Vennovy diagramy: U – základní (universální) množina



Sjednocení ($A \cup B$): def. $C = A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}$



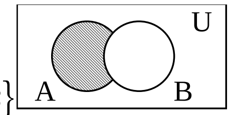
Průnik ($A \cap B$): def. $C = A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$

zákon komutativní (o záměně): $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

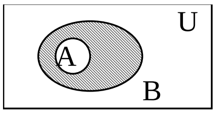
zákon asociativní (o sdružování): $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

zákon distributivní (o roznásobení): $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Rozdíl ($A-B$): def. $C=A-B=\{x\in U; x\in A\wedge x\notin B\}$



Doplněk (A'_B): def. $A\subset B\Rightarrow A'_B=\{x\in U; x\in B\wedge x\notin A\}$



de Morganova pravidla: $(A\cup B)' = A'\cap B'$

$(A\cap B)' = A'\cup B'$

1.7 ČÍSELNÉ INTERVALY

Otevřený: $(a,b)=\{x\in R; a<x<b\}$

Uzavřený: $\langle a,b\rangle=\{x\in R; a\le x\le b\}$

Polouzavřený: zleva uzavřený: $\langle a,b)=\{x\in R; a\le x<b\}$

zprava uzavřený: $(a,b\rangle=\{x\in R; a<x\le b\}$

S intervaly pracujeme stejně jako s množinami, a proto pro ně platí stejné operace.

1.8 SPOLEČNÝ NÁSOBEK A DĚLITEL

Nejmenší spol. násobek: $n(12,28,42)=2\cdot 2\cdot 3\cdot 7=84$, v prvočíselném rozkladu má každé prvočíslo obsažené v nejvyšší mocnině.

Největší spol. dělitel: $D(12,28,42)=2$, v prvočíselném rozkladu má pouze spol. prvočíslo.

2 MATEMATICKÉ DŮKAZY

Přímý důkaz ($A\Rightarrow B$)**:** vycházíme z předpokladu dané věty a musíme se dopracovat k jejímu tvrzení

Např. $\forall a\in Z^+; a=\text{liché č.}\Rightarrow a^2=\text{liché č.}$

liché č.: $2k+1$, potom $(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$, kde $4(k^2+k)$ je sudé.

Nepřímý důkaz ($A\Rightarrow B \Leftrightarrow B'\Rightarrow A'$)**:** dokazujeme větu obměněnou pomocí přímého důkazu.

Např. $\forall m\in Z^+; m^2$ dělitelné $3\Rightarrow m$ dělitelné 3

nedělitelné 3: $3k+1\vee 3k+2$, potom $(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$ nebo $(3k+2)^2=3(3k^2+4k)+4$, kde $3(3k^2+4k)$ a $3(3k^2+2k)$ jsou dělitelná 3.

Důkaz sporem ($(A\Rightarrow B)'\Leftrightarrow A\wedge B'$)**:**

Např. $\forall a,b\in R^+; \dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

předpokládáme $\exists a,b\in R^+; \dfrac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$, po úpravách rovnice: $(a-b)^2<0$, protože x^2 nemůže být <0 – spor s předpokladem a daná věta platí.

Matematická indukce: Dokážeme, že platí *V*(1), potom že pro $k\ge 1; V(k)\Rightarrow V(k+1)$.

Např. $\forall n\in N;\quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

1) ověření $n=1$; $L=P$

2) předpoklad $k\ge 1$; $L=1^2+2^2+\ldots n^2\quad P=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

máme dokázat $k+1$; $1^2+2^2+3^2+\ldots .k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$L=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]=$

$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

3) platí pro $\forall k\in N$

3 MOCNINY A ODMOCNINY, MOCNINNÉ FUNKCE

3.1 MOCNINY S CELOČÍSELNÝM EXPONENTEM

$a^r a^s = a^{r+s} \quad \forall a,b \in R, \forall r,s \in Z$

$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad a \neq 0$

$\left(a^r\right)^s = a^{rs}$

$(ab)^r = a^r b^r$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r} \quad b \neq 0$

$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r} \quad a \neq 0, \ r > 0$

$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$

$\sqrt{a^2} = |a| = \pm a$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \forall a,b \in R_0^+, \forall m,n,p \in N$

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad b \neq 0$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

Slučovat lze pouze souhlasné odmocniny, odmocnit součet a rozdíl nelze.

Částečné odmocňování: $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$

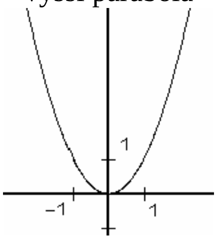
Usměrňování zlomků: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Mocniny s reálným exponentem: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad \forall m \in Z, \forall n \in N, \forall a \in R^+$

3.2 MOCNINNÉ FUNKCE

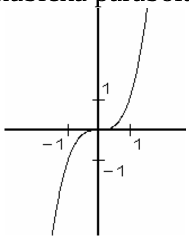
$y = x^2$

vyšší parabola

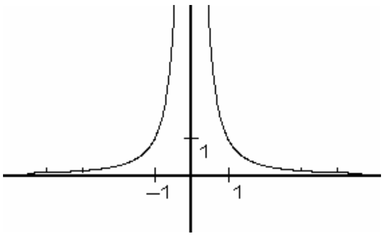


$y = x^3$

kubická parabola

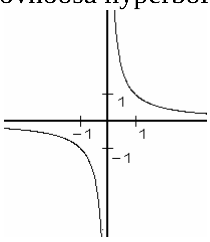


$y = x^{-2}$



$y = x^{-1}$

rovnoosá hyperbola



4 ÚPRAVY ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ

4.1 MNOHOČLENY

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$

4.2 LOMENÉ VÝRAZY

Definiční obor – obor proměnnosti – (D) je množina, ve které má daný výraz řešení.

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} \qquad D = R - \{1\}$$

4.3 DĚLENÍ MNOHOČLENU MNOHOČLENEM

$$(x^2 - 2x - 1) : (x - 1) = x - 1 - \frac{2}{x-1}$$

$$\begin{array}{r} -(x^2 - x) \\ \hline -x - 1 \\ -(-x+1) \\ \hline -2 \end{array}$$

zbytek

5 FUNKCE A JEJICH ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Funkce: předpis, který každé hodnotě nezávislé proměnné *x* z def. oboru přiřadí **právě jednu** hodnotu závislé proměnné *y*.

Graf funkce: množina všech bodů o souřadnicích $[x, f(x)]$.

Obor hodnot (H)**:** množina řešení (*y*) dané funkce.

5.1 VLASTNOSTI FUNKCÍ

Rostoucí: $\forall x \in D;\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ – např. $y = x$

Klesající: $\forall x \in D;\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ – např. $y = -x$

Konstantní: $\forall x \in D;\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ – např. $y = 0$

Sudá: $\forall x \in D;\quad f(-x) = f(x)$ – např. $y = \cos(x)$

Lichá: $\forall x \in D;\quad f(-x) = -f(x)$ – např. $y = \sin(x)$

Periodická: průběh funkce se v určitých cyklech opakuje – např. $y = \sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$

Prostá (monotónní): $\forall x \in D;\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ – např. $y = x$

Inverzní: graf funkce (*f*) a funkce inverzní (f^{-1}) je souměrný podle osy I. a III. kvadrantu. Např.

$f : y = x^2 \Rightarrow f^{-1} : x = y^2$ (zaměníme *x* a *y*). Pro $D = R_0^+$ platí $y = \sqrt{x}$

5.2 TYPY FUNKCÍ

Jednouchá: $y = f(x)$ – např. $y = \sin(x)$

Složená: $y = g[f(x)]$ – např. $y = \sin^2 x$

6 LINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FUNKCE

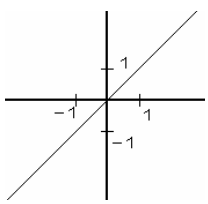
6.1 LINEÁRNÍ

$y = ax + b \quad a \neq 0 \quad D = R \quad H = R$

pro $a = 0 \Rightarrow y = b$ – funkce konstantní

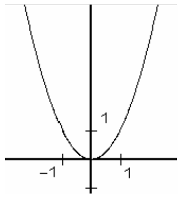
pro $a > 0$ – funkce rostoucí

pro $a < 0$ – funkce klesající



$y = x$

6.2 Kvadratická



$y = x^2$

$y = ax^2 + bx + c$

$|a| > 1$ – sevřená

$|a| < 1$ – rozevřená

$a > 0$ – v horní polorovině (konvexní)

$a < 0$ – v dolní polorovině (konkávní)

7 Lineární funkce, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

7.1 Rovnice

Obor proměnnosti: obor, v němž chceme danou rovnici řešit.
Definiční obor (D)**:** obor, v němž má rovnice smysl.
Obor pravdivosti (P=K)**:** množina kořenů.
Řešit rovnici znamená najít takové *x*, které dané rovnici vyhovuje.
Nutno provést zkoušku.
Ekvivalentní úpravy rovnic:

1) Rovnice lze převádět z jedné strany na druhou, ale s opačným znaménkem.
2) Rovnice se nezmění, když k oběma jejím stranám přičteme nebo odečteme stejný výraz.
3) Rovnice se nezmění, když obě její strany vynásobíme nebo vydělíme stejným výrazem.

7.2 Nerovnice

ostré znaky nerovnosti:	$<$	menší než
	$>$	větší než
neostré znaky nerovnosti:	$\leq$	menší nebo rovno než
	$\geq$	větší nebo rovno než

Ekvivalentní úpravy nerovnic:

1) Nerovnice se nezmění, když k oběma jejím stranám přičteme nebo odečteme stejný výraz.
2) V nerovnici lze převádět z jedné strany na druhou, ale s opačným znaménkem.
3) Nerovnice se nezmění, jestliže její obě strany vynásobíme stejným výrazem, který je kladný na celém definičním oboru.
4) Násobíme-li nerovnici výrazem, který je záporný na celém def. oboru, pak musíme převrátit znak nerovnosti.

7.3 Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru

Rovnice: $(x-2)(3-x) = 0$ – Součin je nulový, je-li nulový alespoň 1 činitel – $x = 2 \vee x = 3$.

$\dfrac{x-2}{3-x} = 0$ – Podíl je nulový, je-li čitatel roven nule – $x = 2$

Nerovnice: $(x-2)(3-x) < 0$ nebo $\dfrac{x-2}{3-x} < 0$ $\quad (x \neq 3)$ – pomocí **nulových bodů**

$x - 2 = 0 \qquad 3 - x = 0$

$x = 2 \qquad x = 3$

	-∞ 2		3 +∞
x–2	–	+	+
3–*x*	+	+	–

Pozn.: V nulových bodech mění dvojčlen znaménko. Je-li u *x* koeficient kladný, pak od nulového bodu nalevo je dvojčlen záporný a napravo kladný.

$x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ – při neostrém znaku nerovnosti by byl interval uzavřený.

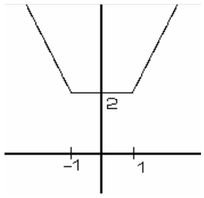
7.4 Absolutní hodnota

Absolutní hodnota: vzdálenost bodu od počátku na číselné ose.
Funkce, rovnice a nerovnice řešíme pomocí **nulových bodů**.

Např. $y = |x+1| + |1-x|$

$x+1=0 \qquad 1-x=0$

$x=-1 \qquad x=1$



	$x \in (-\infty;-1)$	$x \in \langle -1;1)$	$x \in \langle 1;\infty)$
	-1		1
$x+1$	–	+	+
$1-x$	+	+	–
	$y = -(x+1)+(1-x)$	$y = (x+1)+(1-x)$	$y = (x+1)-(1-x)$
	$y = -2x$	$y = 2$	$y = 2x$

Pozor u rovnic a nerovnic musíme vždy výsledek porovnat s intervalem – např. $x \in \langle 1;3)$ a výsledek je $x = 4$, proto rovnice nemá v tomto intervalu řešení.

8 KVADRATICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$

Neúplná kvadratická rovnice: $b, c = 0 \vee c = 0$

Ryze kvadratická rovnice: $b = 0$

$x^2 = a$

$x = |\sqrt{a}| = \pm\sqrt{a}$

Řešení kvadratické rovnice:

$ax^2 + bx + c = 0$

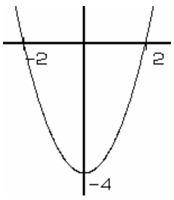
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D > 0 \quad$ 2 reálná řešení

$D = 0 \quad$ 1 reálné řešení

$D < 0 \quad$ 2 komplexní řešení

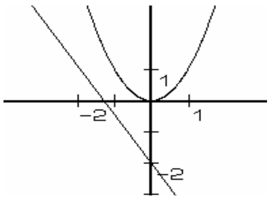
8.1 GRAFICKÉ ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE



$x^2 - 4 = 0$

$y = x^2 - 4$

$K = \{\pm 2\}$



$2x^2 + 3x + 4 = 0$

$y = x^2 \wedge y = -1{,}5x - 2$

$K = \{ \}$

9 VZTAHY MEZI KOŘENY A KOEFICIENTY KVADRATICKÉ ROVNICE

$x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = q = \frac{c}{a}$

Rozklad kvadratického dvojčlenu: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0$
Diskuse kvadratické rovnice s parametrem: viz. otázka č. 13

10 IRACIONÁLNÍ ROVNICE

tzn. neznámá je pod odmocninou
provádíme zkoušku

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{3x-2} = 4 \qquad /(\ )^2$$
$$(6-x) + 2\sqrt{6-x}\sqrt{3x-2} + (3x-2) = 16$$
$$2\sqrt{(6-x)(3x-2)} = 12 - 2x$$
$$\sqrt{(6-x)(3x-2)} = 6 - x \qquad /(\ )^2$$
$$(6-x)(3x-2) = (6-x)^2 \qquad /(6-x)$$

$$6 - x_1 = 0 \qquad \vee \qquad 3x_2 - 2 = 6 - x_2$$
$$x_1 = 6 \qquad\qquad 4x_2 = 8$$
$$x_2 = 2$$

$$L_1 = \sqrt{0} + \sqrt{16} = 4 \qquad L_2 = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$$
$$P_1 = 4 \qquad P_2 = 4$$
$$L_1 = P_1 \Rightarrow K_1 = \{6\} \qquad L_2 = P_2 \Rightarrow K_2 = \{2\}$$

11 KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Komplexní – složené, *imaginární* – neskutečné, vymyšlené
$a = [a_1 + a_2]$ – Gausova rovina, $|a|$ – vzdálenost v G. rovinně od počátku

Absolutní hodnota: $|a| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$ – reálné číslo
Komplexní jednotka: číslo, jehož absolutní hodnota se rovná 1
Algebraický tvar: $a = a_1 + a_2 i$
Komplexně sdružené č.: $\overline{a} = a_1 - a_2 i$,
Goniometrický tvar: $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
Exponenciální tvar: $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$ – α v radiánech

Opačné číslo: $-a = -a_1 - a_2 i$
Převrácené číslo: $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a_1 + a_2 i}$

11.1 OPERACE S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

$i^2 = -1$
Sčítání: $a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$
Násobení: $a \cdot b = (a_1 + a_2 i)(b_1 + b_2 i)$
$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] = |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$$
Dělení: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a_1 + a_2 i}{b_1 + b_2 i} \cdot \dfrac{b_1 - b_2 i}{b_1 - b_2 i}$
$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot [\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)] = \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{i(\alpha-\beta)}$$

11.2 MOIVREOVA VĚTA

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$
Mocniny: $a^n = |a|^n \cdot (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

Odmocniny: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$

12 ŘEŠENÍ ROVNIC V OBORU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

12.1 KVADRATICKÉ ROVNICE S DISKRIMINANTEM MENŠÍM 0

$$x = \pm\sqrt{-m} = \pm i\sqrt{m}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (D < 0) \;\Rightarrow\; x = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$$

12.2 BINOMICKÉ ROVNICE

$$x^n = m \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{|m|} \cdot \left(\cos\frac{0+2k\pi}{n} + i\sin\frac{0+2k\pi}{n}\right)$$

Je-li binomická rovnice s reálnými kořeny stupně sudého, pak má 2 reálné kořeny (čísla opačná) a komplexní kořeny jsou vždy 2 a 2 komplexně sdružené.

Je-li stupně lichého, pak má jeden reálný kořen a 2 a 2 komplexně sdružené.

13 ROVNICE S PARAMETREM

Lineární rovnice s parametrem:

$$x(t^2 - 1) = t - 1$$

$$x(t-1)(t+1) = t - 1$$

$t \neq 1 \quad \vee \quad t = 1$

$x(t+1) = 1 \qquad 0 = 0 \Rightarrow K = R$

$t \neq -1 \quad \vee \quad t = -1$

$x = \frac{1}{t+1} \qquad 0 \neq 1$

$K = \left\{\frac{1}{t+1}\right\} \qquad K = \{\ \}$

Diskuse:

pro $t \neq 1, -1$ má $K = \left\{\frac{1}{t+1}\right\}$

pro $t = 1$ má $K = R$

pro $t = -1$ má $K = \{\ \}$

Kvadratická rovnice s parametrem: $px^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad D = b^2 - 4pc$

$D > 0 \Rightarrow p < \frac{b^2}{4c}$ x má 2 řešení

$D = 0 \Rightarrow p = \frac{b^2}{4c}$ x má 1 řešení

$D < 0 \Rightarrow p > \frac{b^2}{4c}$ x nemá řešení v R

U parametrických rovnic s neznámou ve jmenovateli nebo u rovnic, kde umocníme či odmocníme, děláme zkoušku.

14 SOUSTAVY ROVNIC A NEROVNIC

14.1 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC O DVOU A VÍCE NEZNÁMÝCH

Metody: *sčítací, dosazovací*

$$\frac{2}{x+z}+\frac{3}{x+y}=13$$
$$\frac{1}{x+z}-\frac{2}{y+z}=-16$$
$$\frac{3}{x+y}+\frac{1}{y+z}=15$$

$x, y, z \in R$

$x \neq -y, -z$

$y \neq -z$

substituce: $\frac{1}{x+z}=a$, $\frac{1}{x+y}=b$, $\frac{1}{y+z}=c$

$$2a+3b=13$$
$$a-2c=-16$$
$$3b+c=15 \quad /\cdot 2$$

$$c=\frac{a}{2}+8=\frac{4}{2}+8=10$$

$$2a+3b=13$$
$$a+6b=14 \quad /(-2)$$
$$-9b=-15$$
$$b=\tfrac{5}{3}$$

$$a=14-6b=14-10=4$$

$$\frac{1}{x+z}=4$$
$$\frac{1}{x+y}=\frac{5}{3}$$
$$\frac{1}{y+z}=10$$

$$x+z=\tfrac{1}{4} \quad /(-1)$$
$$x+y=\tfrac{3}{5}$$
$$y+z=\tfrac{1}{10}$$

$$x=\tfrac{2}{8}-z=\tfrac{3}{8}$$

$$y-z=\tfrac{7}{20}$$
$$y+z=\tfrac{1}{10}$$
$$2y=\tfrac{9}{20}$$
$$y=\tfrac{9}{40}$$

$$z=\tfrac{4}{40}-y=-\tfrac{1}{8}$$

Soustavy lineárních nerovnic o jedné neznámé
Vyřešíme každou zvlášť, potom uděláme průnik výsledků.

14.2 GRAFICKÉ ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH ROVNIC A NEROVNIC O DVOU NEZNÁMÝCH

Nakreslíme graf funkcí. Výsledkem je průnik grafů.

14.3 SOUSTAVY LINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ ROVNICE

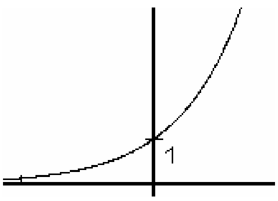
Řešíme dosazovací metodou – z lineární vyjádříme a dosadíme do kvadratické.

15 EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ FUNKCE

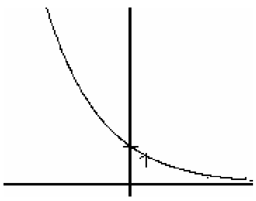
15.1 GRAFY FUNKCÍ

Exponenciální funkce: $y=a^x$ $\quad a>0, a\neq 1$

$a>1$

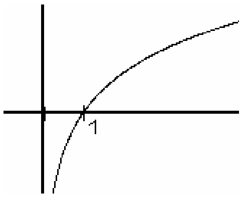


$a<1$

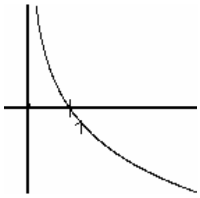


Logaritmická funkce: $y = \log_a x \qquad a > 0,\ a \neq 1 \qquad D = R^+$

$a > 1$



$a < 1$



15.2 VĚTY O LOGARITMECH

$a^x = b \quad \Rightarrow \quad x = \log_a b \qquad b > 0$

nejde logaritmovat součet ani rozdíl

$\log_a (r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$

$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$

$\log_a r^s = s \cdot \log_a r$

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

$\log_a a = 1$

$\log_a 1 = 0$

$a^{\log_a x} = x$

Pokud je základ $e = 2{,}71828\ldots$, jedná se o přirozený logaritmus a značí se $\ln x$

Při základu rovnému 10 se jedná o dekadický logaritmus – $\log x$

16 EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE A NEROVNICE

rovnice

$$3^{x+2} - 5^x = 3^{x+4} - 5^{x+2}$$
$$3^x \cdot 3^2 - 5^x = 3^x \cdot 3^4 - 5^x \cdot 5^2$$
$$3^x\left(3^2 - 3^4\right) = 5^x\left(1 - 5^2\right)$$
$$72 \cdot 3^x = 24 \cdot 5^x$$
$$3 \cdot 3^x = 5^x$$
$$3^{x+1} = 5^x$$
$$(x+1)\log 3 = x \cdot \log 5$$
$$x(\log 3 - \log 5) = -\log 3$$
$$x = \frac{\log 3}{\log 5 - \log 3}$$

nerovnice

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^{2x+3} \leq \left(\tfrac{1}{8}\right)^{x+2}$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4x+6} \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3x+6}$$
$$4x + 6 \geq 3x + 6$$
$$x \geq 0$$

Základ < 1
převrací se nerovnost

$$2^x \geq 3^{x+1}$$
$$x \cdot \log 2 \geq x \cdot \log 3 + \log 3$$
$$x(\log 2 - \log 3) \geq \log 3$$
$$x \leq \frac{\log 3}{\log 2 - \log 3}$$

$\log 2 - \log 3 < 0$
převrací se nerovnost

$\sqrt[x]{81} + \dfrac{27}{\sqrt[x]{81}} = 12$ – substitucí $a = \sqrt[x]{81}$

$a^2 - 12a + 27 = 0 \Rightarrow \sqrt[x]{81} = 9 \vee \sqrt[x]{81} = 3$

$3^{\frac{4}{x}} = 3^2 \vee 3^{\frac{4}{x}} = 3^1 \Rightarrow x = 2 \vee x = 4$

17 LOGARITMICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

Podmínky pro logaritmus i pro jmenovatele.
Odlogaritmovat mohu pouze tehdy, pokud mají logaritmy stejný základ.

rovnice:

$$\frac{\log x}{\log(3x+5)} = 1$$

$$\log x = \log(3x+5)$$

$$x = 3x+5$$

$$x = -2{,}5 \qquad K = \{\ \}$$

podmínky:

$$x > 0 \quad \wedge \quad 3x+5 > 0 \quad \wedge \quad \log(3x+5) \neq 0$$

$$x > -\tfrac{5}{3} \qquad \log(3x+5) \neq \log 1$$

$$x \neq -\tfrac{4}{3}$$

nerovnice: při $0 < a < 1$ se u exponenciálních a logaritmických nerovnic převrací nerovnost

$$\log_2(x+2) > 3$$

$$\log_2(x+2) > \log_2 8$$

$$x > 6$$

$$\log_{0,5}(x+2) > 3$$

$$\log_{0,5}(x+2) > \log_{0,5} \tfrac{1}{8}$$

$$x < -\tfrac{15}{8}$$

Základ < 1
převrací se nerovnost

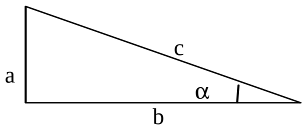
Podmínky:

$$x+2 > 0$$

$$x > -2$$

18 GONIOMETRICKÉ FUNKCE

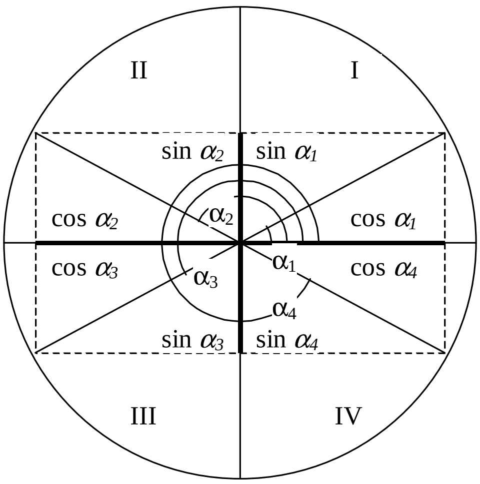
18.1 DEFINICE NA PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cot g\alpha = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a}$$

18.2 DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI



$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$$

$$\alpha_3 = 180° + \alpha_1$$

$$\alpha_4 = 360° - \alpha_1$$

II. kvadrant: $\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1$

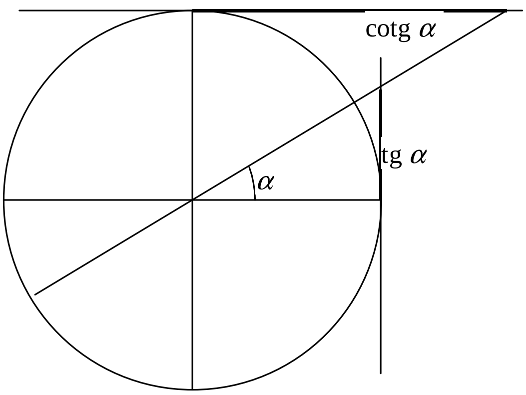
$\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$

III. kvadrant: $\sin\alpha_3 = -\sin\alpha_1$

$\cos\alpha_3 = -\cos\alpha_1$

IV. kvadrant: $\sin\alpha_4 = -\sin\alpha_1$

$\cos\alpha_4 = \cos\alpha$



$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ lichá funkce

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ sudá funkce

perioda je 2π

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ funkce lichá

$\cot g(-\alpha) = -\cot g\,\alpha$ funkce lichá

perioda je π

18.3 ZÁKLADNÍ ÚHLY

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	E
cotg α	E	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Doplňkový úhel: $\alpha' = 90° - \alpha$

$\sin\alpha = \cos\alpha'$

$\cos\alpha = \sin\alpha'$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha'$

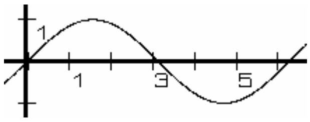
$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha'$

18.4 OBLOUKOVÁ MÍRA

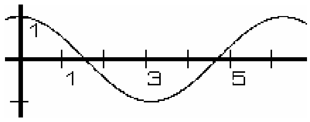
1 rad je středový úhel, který přísluší oblouku jednotkové kružnice, jehož délka je 1.
1 rad = 57° 17’ 44,81’’
360°=2π

18.5 GRAFY FUNKCÍ

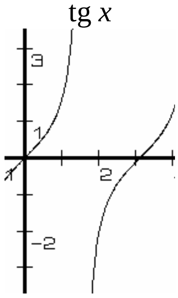
$\sin x$



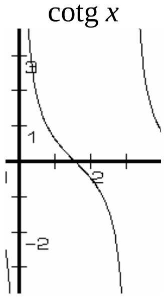
$\cos x$



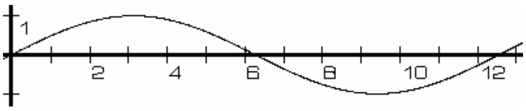
$\operatorname{tg} x$



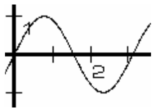
$\operatorname{cotg} x$



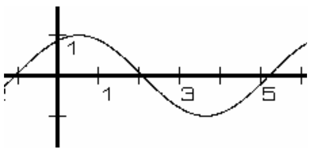
$\sin\frac{x}{2}$



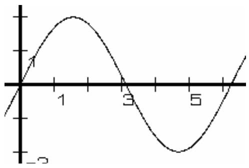
$\sin 2x$



$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$



$2\sin x$



19 VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

Součtové vzorce:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\cot g(x \pm y) = \frac{\pm \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x \mp \operatorname{cotg} y}$$

Dvojnásobný úhel: $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

Poloviční úhel: $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ — znaménko se určí podle kvadrantu

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Součtové věty: $\sin x + \sin y = 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$$\sin x - \sin y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

Převody přes liché násobky $\pi/2$: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$$

20 GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

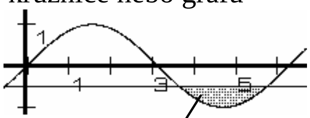
20.1 ZÁKLADNÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

$\sin x = a,\ \cos x = a \qquad a \in \langle -1,1\rangle \qquad x \in R$

$\operatorname{tg} x = a \qquad a \in R \qquad x \in R - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

$\operatorname{cotg} x = a \qquad a \in R \qquad x \in R - \{k\pi\}$

interval se určí podle jednotkové kružnice nebo grafu



Př. **rovnice**

$\sin x = -0{,}5$

$x_1 = 210°,\quad x_2 = 330°$

$K = k \in Z \cup \{210° + 2k\pi, 330° + 2k\pi\}$

nerovnice

$\sin x \le -0{,}5$

$x_1 = 210°,\quad x_2 = 330°$

$K = k \in Z \cup \langle 210° + 2k\pi\ ,\ 330° + 2k\pi\rangle$

20.2 SLOŽITĚJŠÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Pokud je v rovnici více goniometrických funkcí, převedeme je na jednu goniometrickou funkci.
Pokud odmocňujeme, musíme provést zkoušku.

$$\sin 3x = \cos 2x$$

$$\sin 3x - \sin(90° - 2x) = 0$$

$$2\cdot\cos\frac{3x+90°-2x}{2}\cdot\sin\frac{3x-90°+2x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2} = 0 \qquad \vee \qquad \sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2} = 0$$

$$\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad\qquad \frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2} = k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad\qquad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi$$

21 TRIGONOMETRIE

21.1 PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK

Goniometrické funkce

21.2 OBECNÝ TROJÚHELNÍK

Sinova věta: $2r = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ – poměr strany a protilehlého vnitřního úhlu je konstantní a je roven průměru kružnice opsané. **Použití:** známe stranu a 2 úhly nebo 2 strany a úhel jedné z nich.

Kosinova věta:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$
– **Použití:** známe 3 strany nebo 2 strany a úhel jimi sevřený.

22 SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

Samodružný bod – bod X je totožný se svým obrazem X'=X
Samodružný útvar – útvar U, jehož obrazem U' je U
Osová souměrnost: osa souměrnosti
Středová souměrnost: střed souměrnosti
Posunutí (translace): vektor posunutí
Otočení (rotace): střed otočení, úhel otočení
Totožnost (identita)

23 PODOBNOST A STEJNOLEHLOST

23.1 PODOBNOST

Pro každé body X,Y a jejich obrazy X',Y' platí: $|X'Y'| = k|XY|$

k>1 zvětšení
k=1 shodnost
k<1 zmenšení

V podobném trojúhelníku platí, že ve stejném poměru jsou i výšky, těžnice, střední příčky, poloměry kružnice opsané i vepsané, …

2 trojúhelníky jsou si podobné shodují-li se ve dvou úhlech nebo v 1 úhlu a poměru stran svírajících tento úhel.

23.2 STEJNOLEHLOST $H(S;\kappa)$

Pro každé X platí: $|X'S| = |\kappa|\cdot|XS|$, kde S je *střed stejnolehlosti* a κ je *koeficient stejnolehlosti*.

Přímka se zobrazí na přímku rovnoběžnou.

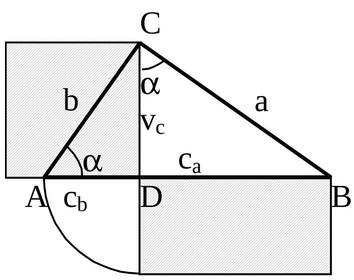
24 PYTHAGOROVA VĚTA, EUKLIDOVY VĚTY

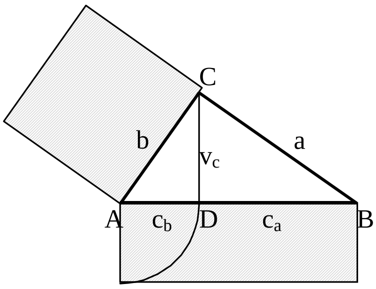
Platí pro pravoúhlý trojúhelník *ACB*.

I. Euklidova věta: $v_c^2 = c_a \cdot c_b$ – obsah čtverce sestrojeného nad výškou trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z obou úseků na přeponě.

Odvození:

$$R\Delta\ ACB \Rightarrow \angle DAC = \angle DCB \Rightarrow \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|BD|}{|CD|} \Rightarrow \frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c}$$





II. Euklidova věta: $b^2 = c \cdot c_b$, $a^2 = c \cdot c_a$ – obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z celé přepony a úseku přilehlého k dané odvěsně.

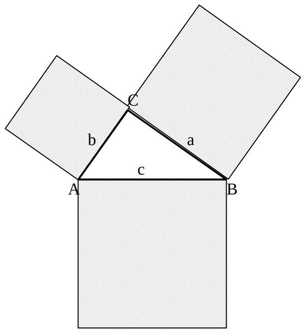
Odvození:

$$R\Delta\ ACB \text{ a } R\Delta\ ADC \Rightarrow \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{c_b}{b} = \frac{b}{c}$$

Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = c^2$ – součet obsahů čtverců nad odvěsnami se rovná obsahu čtverce nad přeponou.

Odvození: sečtením Euklidových vět.

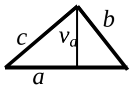
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$c \cdot c_a + c \cdot c_b = c^2$$
$$c_a + c_b = c$$



25 ROVINNÉ ÚTVARY

Trojúhelník: $O = a + b + c$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

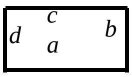


Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

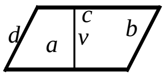
Obdélník: $O = 2(a+b)$

$S = ab$



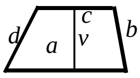
Rovnoběžník: $O = 2(a+b)$

$S = a \cdot v_a$



Lichoběžník: $O = a + b + c + d$

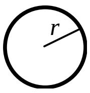
$$S = \frac{(a+c)v}{2}$$



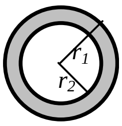
Pravidelný *n*-úhelník: $S = n \cdot S\Delta ABS$ – *n*-krát obsah jednoho trojúhelníka

Kruh: $O = 2\pi\ r$

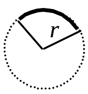
$S = \pi\ r^2$



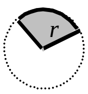
Mezikruží: $S = \left|\pi\ r_1^{\ 2} - \pi\ r_2^{\ 2}\right|$



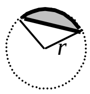
Oblouk: $O = r\varphi$ – úhel v radiánech



Výseč: $S = \frac{r^2}{2}\varphi$



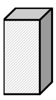
Úseč: $S = \frac{r^2}{2}\varphi - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin\varphi$ – obsah výseče mínus obsah trojúhelníka



26 NEROTAČNÍ TĚLESA

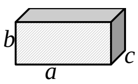
Hranol: $V = S_p \cdot v$

$S = 2S_p + S_{pl}$

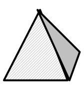


Kvádr: $V = abc$

$S = 2(ab + bc + ac)$



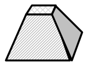
Jehlan: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$



$S = S_p + S_{pl}$

Komolý jehlan: $V = \frac{1}{3} v \left(S_{p1} + S_{p2} + \sqrt{S_{p1} \cdot S_{p2}} \right)$

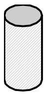
$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$



27 ROTAČNÍ TĚLESA

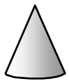
Válec: $V = \pi r^2 v$

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$



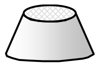
Kužel: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$

$S = \pi r^2 + \pi r s$, kde $s = \sqrt{r^2 + v^2}$ – délka pláště



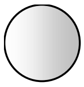
Komolý kužel: $V = \frac{1}{3} \pi v \left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 \right)$

$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \left(\pi r_1 + \pi r_2 \right) s$



Koule: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

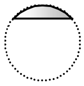
$S = 4\pi r^2$

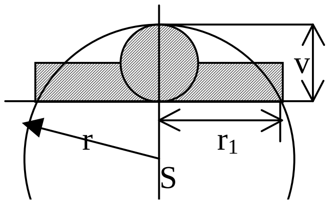


Kulová úseč: $V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v}{2} \right)^3$

objem válce plus objem koule

$r_1 = \sqrt{r^2 - (r - v)^2}$

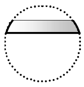


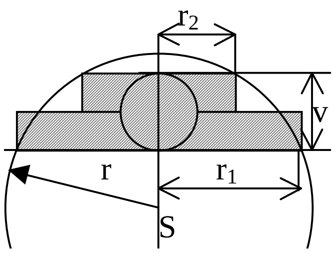


$S = \pi r_1^2 + 2\pi r v$ – obsah podstavy plus obsah kulového vrchlíku

Kulová vrstva: $V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi r_2^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v}{2} \right)^3$

objem dvou válců a objem koule





28 MATICE A DETERMINANTY

$$a_{ij} \quad \ldots \quad \begin{matrix} i = 1,2,3 \ldots m \\ j = 1,2,3 \ldots n \end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Společný název pro řádek a sloupec je **řada**.

Typ matice: Obdélníková, čtvercová (m=n), sloupcová (m,1) a řádková (1,n), diagonální (samé nuly, jen na hlavní diagonále ne), jednotková (samé nuly, na diagonále jedničky)

Hlavní diagonála: z LH do PD rohu, **vedlejší diagonála:** z PH do LD rohu

Transponovaná matice: zaměněné sloupce a řádky

Symetrická matice: matice je stejná jako transponovaná

Hodnost matice: počet lineárně nezávislých řádků v matici (maximálně rovna menšímu z m a n)

28.1 OPERACE S MATICEMI

Hodnost matice se nemění, když

1) matici transponujeme
2) nějakou řadu vynásobíme nenulovým číslem
3) k některé řadě přičteme lineární kombinaci (násobek) jiné řady s ní rovnoběžné
4) v matici vynecháme nebo přidáme řadu, která je lineární kombinací jiné řady s ní rovnoběžné

Matice téhož typu se stejnou hodností jsou ekvivalentní $A \cong B$

Hodnost matice:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 11 \\ -3 & -8 & 5 \\ 1 & -12 & 21 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -12 & 21 \\ -3 & -8 & 5 \\ 7 & 4 & 11 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -12 & 21 \\ 0 & -44 & 68 \\ 0 & 88 & -136 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -12 & 21 \\ 0 & -11 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h=2$$

Násobení matice: $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

Součet matic: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

28.2 DETERMINANT

Determinant 2. stupně: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Determinant 3. stupně: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

29 LINEÁRNÍ ALGEBRA

soustava m rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

h je hodnost matice (a_{ij})

h_r je hodnost matice $(a_{ij}b_i)$

pokud $b_i = 0 \quad i = 1,2,\dots m$ je soustava **homogenní**, jinak je **nehomogenní**

podmínka řešitelnosti

1) $h \neq h_r$ – nemá řešení
2) $h = h_r$
   - $h = n$ – jedno řešení
   - $h < n$ – nekonečně mnoho řešení ($n - h$ neznámých volíme a ostatní dosadíme – např. $x_4 = t_1$, $x_3 = t_2$, $x_2 = t_1 + t_2$, $x_1 = 2t_2$)

Příklad:

$$\begin{aligned} -x_1 & & +x_3 &= -1 \\ 2x_1 & +7x_2 & &= 1 \\ x_1 & -x_2 & 3x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 6 \end{array}\right) \qquad h = h_r = n$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad -x_2 \quad +3x_3 &= 2 & x_1 &= 1\tfrac{1}{5} \\ -x_2 \quad +4x_3 &= 1 \Rightarrow & x_2 &= -\tfrac{1}{5} \\ 30x_3 &= 6 & x_3 &= \tfrac{1}{5} \end{aligned}$$

Cramerovo pravidlo: m=n, pokud determinant $|A| \neq 0$ – 1 řešení $x_k = \dfrac{|A_k|}{|A|}$, kde A_k je matice, ve které jsme k. sloupec nahradil sloupcem pravé strany.

Příklad:

$$\begin{aligned} -x_1 \quad\quad\quad + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 7x_2 \quad\quad &= 1 \\ x_1 - x_2 \quad 3x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad |A| = -30$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad |A_1| = -36 \qquad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-36}{-30} = 1\frac{1}{5}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad |A_2| = 6 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{6}{-30} = \frac{-1}{5}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad |A_3| = -6 \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-6}{-30} = \frac{1}{5}$$

30 VEKTORY

Vektor je množina všech souhlasně orientovaných úseček, které mají stejnou velikost.
Vektory rovnoběžné jsou **kolineární**. (souhlasně, nesouhlasně kolineární)

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (X_B - X_A, Y_B - Y_A)$$

$$|AB| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}}$$

Vektor opačný: $-\vec{\mathbf{u}} = (-u_1, -u_2)$

Součet vektorů: $\vec{\mathbf{u}} \pm \vec{\mathbf{v}} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2)$

Násobení vektoru skalárem: $k \cdot \vec{\mathbf{u}} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$

Dva vektory jsou **lineárně závislé**, jestliže jeden z nich je lineárním násobkem druhého.
Tři vektory jsou **lineárně závislé**, je-li alespoň jeden z nich lineární kombinací ostatních dvou.
Tři vektory jsou **lineárně nezávislé**, pokud ani jeden není lineární kombinací zbývajících dvou.

Skalární součin: $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}| \cdot \cos\alpha = u_1 v_1 + u_2 v_2$ – výsledkem je skalár

Úhel dvou vektorů: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}|}$

Rovnoběžné vektory: $\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}} \Rightarrow \vec{\mathbf{u}} = k \cdot \vec{\mathbf{v}}$, **kolmé vektory:** $\vec{\mathbf{u}} \perp \vec{\mathbf{v}} \Rightarrow \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$

Vektorový součin: $|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}| = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}| \cdot \sin\varphi$ – velikost. Směr: kolmo k oběma vektorům, pravotočivá báze (prsty – **u**,**v**, palec ukazuje směr).

$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$ **–** opačná orientace

$k(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = (k \cdot \vec{\mathbf{u}}) \times \vec{\mathbf{v}}$

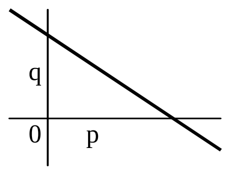
$\vec{\mathbf{w}} \times (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{u}}) + (\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}})$

$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ – nulový vektor

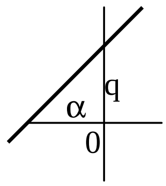
31 ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V ROVINĚ

Přímka:

- parametrické vyjádření:
  $x = X_1 + t \cdot u_1$
  $y = Y_1 + t \cdot u_2$
  pro přímku – $t \in R$
  pro úsečku – $t \in \langle 0,1 \rangle$
  pro polopřímku – $t \in \langle 0, \infty)$
- obecná rovnice přímky:
  $ax + by + c = 0$
  $\vec{\mathbf{n}} = (a, b)$ – **normálový** (kolmý) vektor
  $\vec{\mathbf{s}} = (-b, a)$ – **směrový** vektor
  $p \| O_x \Rightarrow by + c = 0$
  $p \| O_y \Rightarrow ax + c = 0$
- úsekový tvar rovnice přímky:



  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
  $p = -\frac{c}{a}$
  $q = -\frac{c}{b}$
- směrový tvar:



  $y = kx + q$
  $k = -\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha$

Polorovina: $ax + by + c \geq 0$

32 ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V PROSTORU

Přímka definována pouze parametricky.
Rovina:
- parametrická rovnice:
  $x = X_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1$
  $y = Y_1 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2$
  $z = Z_1 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3$
  kde $A = [X_1, Y_1, Z_1]$ je bod roviny a **u**,**v** jsou nekolineární vektory vycházející z bodu *A* a náležející do roviny.
- obecná rovnice roviny:
  $ax + by + cz + d = 0$
  získáme ji:
  1) pomocí dvou vektorů náležejících rovině – přes normálový vektor
     $\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c) = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ – normálový vektor
  2) z parametrické rovnice – vyloučením *t, s*
  3) pomocí 3 bodů náležejících do roviny – dosazením bodů za *x, y, z* a dopočítáním *a, b, c, d*, přičemž za jednu neznámou volíme

  zvláštní případy rovnice:

$$\rho \| O_x \Rightarrow a = 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

$$\rho \| O_y \Rightarrow a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$$

$$\rho \| O_z \Rightarrow a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$$

$$\rho \| O_x \wedge \rho \| O_y \Rightarrow a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0$$

33 POLOHOVÉ A METRICKÉ VZTAHY ÚTVARŮ V ROVINĚ

Vzájemná poloha dvou přímek:

rovnoběžné

různé – žádný společný bod

shodné – nekonečně mnoho společných bodů

různoběžné – jeden společný bod

Odchylka dvou přímek: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}|}{|\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}|} = \dfrac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{\sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}} \cdot \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \left| \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$

Vzdálenost bodu od přímky: $|Ap| = \dfrac{|aX_0 + bY_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\quad A = [X_0, Y_0]$

34 POLOHOVÉ A METRICKÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU

Vzájemná poloha dvou přímek:

rovnoběžné

různé – žádný společný bod

shodné – nekonečně mnoho společných bodů

různoběžné – jeden společný bod

mimoběžné – žádný společný bod, neleží v jedné rovině

Vzájemná poloha dvou rovin:

rovnoběžné

různé – žádný společný bod

shodné – nekonečně mnoho společných bodů

různoběžné – jedna společná přímka – průsečnice

Příklad: $\rho: 2x - y - z - 1 = 0$

$\sigma: x + y + 2z - 3 = 0$

p: $3x + z - 4 = 0$

$x = t \leftarrow$ Jednu neznámou nahradíme parametrem

$z = 4 - 3x = 4 - 3t$

$y = 3 - x - 2z = -5 + 5t$

Odchylka dvou přímek: stejné jako v rovině

Odchylka přímky od roviny: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{\mathbf{s}_\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{n}_\rho}|}{|\vec{\mathbf{s}_\mathbf{p}}| \cdot |\vec{\mathbf{n}_\rho}|}$

Odchylka dvou rovin: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{\mathbf{n}_\rho} \cdot \vec{\mathbf{n}_\tau}|}{|\vec{\mathbf{n}_\rho}| \cdot |\vec{\mathbf{n}_\tau}|}$

Vzdálenost bodu a roviny: $v = \dfrac{|aX_0 + bY_0 + cZ_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ $\qquad A = [X_0, Y_0, Z_0]$

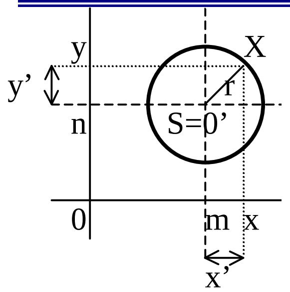
Vzdálenost bodu od přímky: vytvoříme rovinu kolmou k přímce tak, aby procházela bodem A a spočítáme vzdálenost mezi A a průsečíkem přímky a roviny. $\overrightarrow{\mathbf{s}}_p = \overrightarrow{\mathbf{n}}_\rho$, $v = |A \quad \rho \cap p|$

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek: $v(p,q) = v(A,q)$; $A \in p$

Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné: $v(p,\rho) = v(A,\rho)$; $A \in p$

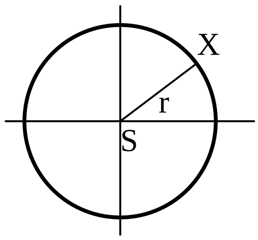
Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin: $v(\rho,\tau) = v(A,\tau)$; $A \in \rho$

35 ANALYTICKÁ GEOMETRIE KRUŽNICE A ELIPSY



Transformační rovnice: $\begin{aligned} x' &= x - m \\ y' &= y - n \end{aligned}$

35.1 KRUŽNICE



Množina všech bodů, které mají od středu (S) stejnou vzdálenost r.

$S = [m, n]$

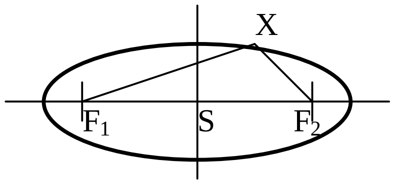
Středová rovnice: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

Vnitřek kružnice: $x^2 + y^2 < r^2$

Obecná rovnice: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$a = -2m, \quad b = -2n, \quad c = m^2 + n^2 - r^2$

35.2 ELIPSA



Množina bodů, které mají od dvou daných pevných bodů (ohnisek) stálý součet vzdáleností, který se rovná $2a$ ($|F_1X| + |F_2X| = 2a$).

A,B – hlavní vrcholy
C,D – vedlejší vrcholy
S – střed
F_1, F_2 – ohniska

$a = |AS| = |CF|$ – hlavní poloosa

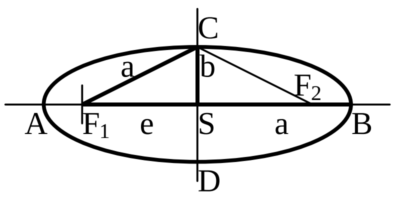
$2a = |AB|$ – hlavní osa

$a^2 = e^2 + b^2$

$b = |CS| = |DS|$ – vedlejší poloosa (vždy menší než hlavní poloosa)

$2b = |CD|$ – vedlejší osa

$|SF_1| = |SF_2| = e$ – excentricita



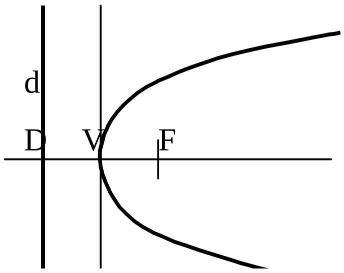
Osová rovnice elipsy: Pro $2a \| O_x$: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Pro $2a \| O_y$: $\dfrac{(x-m)^2}{b^2} + \dfrac{(y-n)^2}{a^2} = 1$

Obecná rovnice elipsy: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

36 ANALYTICKÁ GEOMETRIE PARABOLY

Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od pevného bodu (ohniska) a dané přímky (řídící přímka), která daným bodem neprochází.



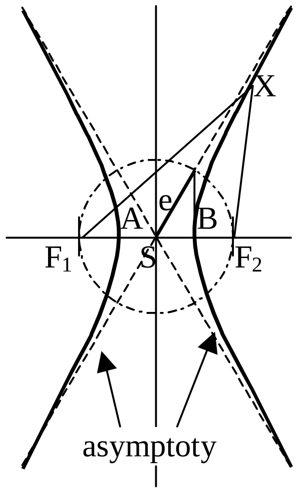
F – ohnisko
d – řídící přímka
V – vrchol
VF – osa paraboly
p – parametr: $\frac{p}{2} = |DV| = |FV|$

Vrcholová rovnice: $O \equiv O_x,\ F \in O^+$		$(y-n)^2 = 2p(x-m)$	inverzní kvadratická fce
	$O \equiv O_x,\ F \in O^-$	$(y-n)^2 = -2p(x-m)$	
	$O \equiv O_y,\ F \in O^+$	$(x-m)^2 = 2p(y-n)$	graf kvadratické funkce
	$O \equiv O_y,\ F \in O^-$	$(x-m)^2 = -2p(y-n)$	graf záporné kvadr. fce

37 ANALYTICKÁ GEOMETRIE HYPERBOLY

Množina všech bodů, které mají tu vlastnost, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od 2 daných pevných bodu (ohnisek) je konstantní ($\left||XF_1| - |XF_2|\right| = 2a$).

A,B – vrcholy paraboly
$|AB| = 2a$ – hlavní osa ($|AS| = a$)
b – vedlejší poloosa
F_1,F_2 – ohniska
e – excentricita $= |SF|$, $e^2 = a^2 + b^2$
nemusí platit $a>b$



Osové rovnice: Pro $2a \equiv O_x$: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Pro $2a \equiv O_y$: $\dfrac{(y-n)^2}{a^2} - \dfrac{(x-m)^2}{b^2} = 1$

Obecná rovnice: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Rovnice asymptot:

$y = \pm kx + q$ — každá hyperbola má 2 asymptoty

$k = \mathrm{tg}\,\alpha$ — pro $2a \equiv O_x$: $\dfrac{b}{a}$, pro $2a \equiv O_y$: $\dfrac{a}{b}$

Rovnoosá hyperbola: $a=b$

Větve leží v I. a III. kvadrantu: $xy = \frac{1}{2}a^2$ – graf lomené funkce

Větve leží v II. a IV. kvadrantu: $xy = -\frac{1}{2}a^2$ – graf záporné lomené fce

38 VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A KUŽELOSEČKY

Počet průsečíků kuželosečky s přímkou:

kružnice a elipsa:

- 2 body **sečna**
- 1 bod **tečna**
- 0 bodů **vnější přímka**

parabola:

- 2 body **sečna**
- 1 bod
  - rovnoběžná s osou **protíná v 1 bodě**

protíná osu **tečna**

0 bodů **vnější přímka**

hyperbola:

2 body **sečna**

1 bod

rovnoběžná s asymptotou **protíná v 1 bodě**

protíná asymptotu **tečna**

0 bodů **vnější přímka**

38.1 TEČNA KUŽELOSEČKY V JEJÍM BODĚ

Bod dotyku: $[X_1, Y_1]$

Kružnice: $(x-m)(X_1-m)+(y-n)(Y_1-n)=r^2$

Elipsa: $\dfrac{(x-m)(X_1-m)}{a^2}+\dfrac{(y-n)(Y_1-n)}{b^2}=1$

Parabola: $(y-n)(Y_1-n)=p(x-m)+p(X_1-m)$

Hyperbola: $\dfrac{(x-m)(X_1-m)}{a^2}-\dfrac{(y-n)(Y_1-n)}{b^2}=1$

39 VARIACE A PERMUTACE

$n!=1\cdot 2\cdot \ldots (n-1)\cdot n$ – faktoriál

Kombinatorické pravidlo součinu: počet všech uspořádaných dvojic, u nichž pro volbu prvního prvku máme n_1 možností a druhého n_2 možností, je roven součinu $n_1 \cdot n_2$.

Variace: $V_k(n)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ je k-tice vytvořená z n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Záleží na pořadí ($'123' \neq '321'$).

Permutace: $P(n)=n!$ je zvláštní případ variace, kdy se $k=n$.

Variace s opakováním: $V'_k(n)=n^k$ je k-tice vytvořená z n prvků tak, že každý se v ní může vyskytovat nejvýše k-krát.

Permutace s opakováním: $P'_{n_1,n_2,\ldots n_p}(n)=\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots n_p!}$, kde n_1 je počet prvků 1. druhu, n_2 2. druhu a … n_p p. druhu, přičemž platí, že $n_1+n_2+\ldots n_p=n$. Všechny prvky téhož druhu jsou stejné a žádné 2 prvky různých druhů nejsou stejné.

40 KOMBINACE

Kombinace: $C_k(n)=\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ je k-tice vytvořená z n prvků tak, že každý z prvků se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Nezáleží na pořadí ($'123' \equiv '321'$). Vztah mezi kombinacemi a variacemi: $C_k(n)=\dfrac{V_k(n)}{k!}$

Kombinační číslo: $\dbinom{n}{k}=C_k(n)$

Kombinace s opakováním: $C'_k(n)=\dbinom{n+k-1}{k}=\dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$ je k-tice vytvořená z n prvků tak, že každý prvek se v ní může opakovat maximálně k-krát.

40.1 Vlastnosti kombinačních čísel

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$$

$$\binom{n}{1}=n$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

40.2 Pascalův trojúhelník

$n=0$	$\binom{0}{0}$	1
$n=1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
$n=2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
$n=3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n=4$	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1

40.3 Binomická věta

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n$$

k-tý člen binomického rozvoje: $c_k=\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1}$

Pro výpočet mnohočlenu n-tého stupně.

Příklad: V mnohočlenu $\left(\frac{1}{3x}-x^3\right)^{11}$ vypočítej koeficient u x^{25}.

$$c\cdot x^{25}=\binom{11}{k-1}\cdot(3x)^{-(12-k)}\cdot(-x)^{3(k-1)}$$

$$c\cdot x^{25}=\binom{11}{k-1}\cdot 3^{k-12}\cdot x^{k-12}\cdot(-1)^{3k-3}\cdot x^{3k-3}$$

$$x^{25}=x^{4k-15}\Rightarrow k=10$$

$$c=\binom{11}{9}\cdot 3^{-2}\cdot(-1)^{27}=-\tfrac{55}{9}$$

41 Základy pravděpodobnosti

Náhodný pokus: ovlivněn náhodnými činiteli.
Náhodný jev: výsledek náhodného pokusu, o kterém můžeme rozhodnout zda je či není pravdivý.
Deterministický pokus: při dodržování daných podmínek vede vždy ke stejnému výsledku.

Pravděpodobnost náhodného jevu: $P(A)=\dfrac{m_A}{n}$, kde m_A je počet výsledků příznivých jevu A a n je počet všech možných výsledků daného pokusu.

Statistická definice pravděpodobnosti: $P(A)=\frac{n_A}{n}$, kde n_A je absolutní četnost a n je celkový počet (z n provedených pokusů je n_A příznivých).

Pravděpodobnost sjednocení jevů: jevy musejí být neslučitelné $A \cap B = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$A \cap A' = 0 \Rightarrow P(A \cup A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

Pravděpodobnost průniku jevů: Pokud jsou jevy A, B, C nezávislé, platí $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Binomická rozdělení: mějme n **nezávislých** pokusů, z nichž každý skončí buď zdarem s pravděpodobností p nebo nezdarem s pravděpodobností q, potom pravděpodobnost, že k jevů skončí zdárně vypočítáme: $P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

42 ZÁKLADY STATISTIKY

Jednotka: každá musí být přesně určena místně, časově, věcně

Soubor: tvořen všemi jednotkami

Rozsah souboru: počet všech jednotek

Znak: vlastnosti, které u dané jednotky sledujeme (**kvalitativní** – odpovídáme slovně, **kvantitativní** – odpovídáme číslem)

Absolutní četnost: počet všech jednotek v souboru, u nichž byl daný jev zjištěn

Relativní četnost: $P(A)=\frac{n_A}{n}$

42.1 CHARAKTERISTIKY POLOHY

Aritmetický průměr: $\overline{x_a} = \frac{\sum x_i}{n}$

Vážený aritmetický průměr: $\overline{x_a} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}$

Modus $\hat{x}$**:** je střední hodnota, která odpovídá hodnotě údaje nejčastěji se vyskytujícího v daném souboru.

Medián $\tilde{x}$**:** hodnota prostředního členu **seřazeného** statistického souboru.

42.2 CHARAKTERISTIKY VARIABILITY

Průměrná odchylka: průměrná odchylka od průměru: $\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$

Vážená průměrná odchylka: $\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| \cdot n_i}{\sum n_i}$

Rozptyl: $\operatorname{var} x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$

Vážený rozptyl: $\operatorname{var} x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}$

Směrodatná odchylka: $\sigma = \sqrt{\operatorname{var} x}$

43 ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

43.1 POSLOUPNOST

Posloupnost je zobrazení všech přirozených čísel do množiny všech reálných čísel (**nekonečná** posloupnost reálných čísel) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \dots a_n, \dots$.

Posloupnost je zobrazení prvních n přirozených čísel do R (**konečná** posloupnost R) $\{a_n\}_{n=1}^{k} = a_1, a_2, \dots a_k$.

Posloupnost rostoucí: $r < s \Leftrightarrow a_r < a_s \qquad r, s \in N$

Posloupnost klesající: $r < s \Leftrightarrow a_r > a_s \qquad r, s \in N$

43.2 ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

$a_{n+1} = a_n + d$, ***d*** diferenciál

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ – jakýkoliv člen posloupnosti je aritmetickým průměrem členu předcházejícího a následujícího

N-tý člen posloupnosti: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Součet prvních *n* členů: $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

44 GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

$a_{n+1} = a_n \cdot q \qquad q \neq 0$

$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

N-tý člen posloupnosti: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Součet prvních *n* členů: $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \qquad q \neq 1$

44.1 VYUŽITÍ POSLOUPNOSTI

Úročitel: $r = 1 + p$, p přírůstek (%)

Pravidelný růst: $a_n = ar^n$, a počátek

Růst s příspěvky: $a_n = ar^n + b \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$, b příspěvky

Jednoduché úrokování (vkládáme po měsíci): $a_n = n \cdot a + a \cdot p \cdot \frac{1}{12} \cdot \dfrac{n(1+n)}{2}$

Složité úrokování (roční): $a_n = a \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$

45 ŘADY

Nekonečná geometrická řada: geometrická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Součet geometrické řady: $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \dfrac{a_1}{1 - q} \qquad |q| < 1$, existuje-li tato limita je **konvergentní**, jinak je **divergentní**.

46 LIMITA, SPOJITOST A DERIVACE FUNKCE

46.1 LIMITA

Limita posloupnosti: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konečnou (vlastní) limitu *a* právě tehdy, když ke každému libovolně zvolenému kladnému ε existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n>n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Zápis: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \quad a \in R$. Je-li konečné číslo reálné, tedy jedná se o vlastní limitu, je posloupnost **konvergentní**. Nemá-li konečnou limitu je **divergentní**.

Limita funkce: Funkce *f* má v bodě *a* limitu *L*, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu *L* existuje okolí bodu *a* takové $\forall x \in U(a) - \{a\};\ f(x) \in U(L)$. Zápis: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Limita zleva: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1$, **zprava:** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

Nevlastní limita: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1 \wedge \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$

Limita v nevlastním bodě: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Věty o limitách:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\text{konst.} \cdot a_n) = \text{konst.} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Neurčité výroky: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, \infty - \infty$

46.2 SPOJITOST FUNKCE

Okolí bodu: $(a-\delta, a+\delta) \qquad \delta > 0$ nebo $|x-a| < \delta$, zápis $U(a,\delta)$

Levé okolí bodu: $\langle a-\delta, a\rangle \qquad \delta > 0$

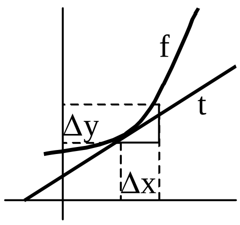
Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, jestliže k libovolně zvolenému okolí *f(a)* existuje okolí bodu *a* takové, že $\forall x \in U(a);\ f(x) \in U(f(a))$.

Funkce *f* je spojitá v intervalu (*a*,*b*), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Funkce *f* je spojitá na <*a*,*b*>, je-li spojitá na (*a*,*b*) a v bodě *a* je spojitá zprava a v bodě *b* je spojitá zleva.

Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, má-li v tomto bodě limitu.

46.3 DERIVACE FUNKCE



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

y' … 1. derivace
y'' … 2. derivace
$y^{(6)}$ … 6. derivace
Jestliže má funkce f v bodě x_0 derivaci je v bodě x_0 spojitá. Obrácená věta neplatí
Funkce f má derivaci v $\langle a,b \rangle$, má-li derivaci v každém bodě (a,b), v bodě a má derivaci zprava a v bodě b zleva.

Je-li funkce f definována v nějakém okolí bodu x_0 a existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, má funkce f v bodě x_0 derivaci zleva. (Obdobně platí pro derivaci zprava).

Derivace: $c' = 0$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

goniometrické fce: $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \qquad x \in R - \{k\pi\}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$

s konstantou: $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

sčítání: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

násobení: $(uvz)' = u'vz + uv'z + uvz'$

dělení: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

složená fce: $(f[g(x)])' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

exponenciální fce: $(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

logaritmické fce: $(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad x > 0$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad x > 0, a > 0, a \neq 1$

implicitní funkce: $y = x^{\sin x}$

$\ln y = \sin x \cdot \ln x$

$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$

$y' = \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot y$

$y' = \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot x^{\sin x}$

Derivujeme tak, že členy obsahující x derivujeme normálně a členy obsahující y derivujeme podle y a násobíme y'.

vyšší derivace: $y'' = (y')'$

47 Geometrický a fyzikální význam derivace

Fyzikální: derivace dráhy podle času je okamžitá rychlost, 2. derivace dráhy podle času je okamžité zrychlení

Geometrický: 1. derivace funkce v bodě dotyku je směrnice tečny $y'(x_0) = k_t$

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$k_t k_n = -1$

48 Vyšetřování průběhu funkce

48.1 Monotónnost funkce

Rostoucí: jestliže je v každém bodě intervalu první derivace kladná ($f(x)' > 0$)

Klesající: je-li v každém bodě 1.derivace záporná ($f(x)' < 0$)

Příklad: $y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3$

rostoucí: $3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow (-\infty, -1), (1, +\infty)$

klesající: $3x^2 - 3 < 0 \Rightarrow (-1, 1)$

48.2 Extrémy funkce

Funkce má v x_0 maximum právě tehdy, existuje-li okolí bodu x_0 takové, že pro každé x náležející do tohoto okolí platí, že funkční hodnota je menší nebo rovna funkční hodnotě funkce v x_0. Obdobně platí i pro minimum funkce.

Stacionární body: $f(x)' = 0$ – v těchto bodech má funkce lokální minimum (pokud je $f''(x) > 0$) nebo maximum ($f''(x) < 0$). Pokud je druhá derivace ve stacionárním bodě rovna nule, nejedná se o extrém.

Inflexní bod: $f(x)'' = 0$ – nelze udělat tečnu, funkce konkávní přechází na konvexní.

konkávní funkce: $f(x)'' < 0$ – celý graf leží pod tečnou

konvexní funkce: $f(x)'' > 0$ – celý graf leží nad tečnou

48.3 Vyšetření průběhu funkce

1) Určit definiční obor funkce
   funkce sudá, lichá, periodická
2) Body, v nichž není definována, ale má v nich limitu zprava a zleva
   Limita v nevlastních bodech
3) Průsečíky s osami x,y
   Znaménka funkčních hodnot
4) Výpočet I. derivace
   Nulové body I. derivace – stacionární body
   Body, v nichž není derivace definována
5) Intervaly monotónnosti
6) Výpočet II. derivace
   Nulové body II. derivace – inflexní body
   Body, v nichž není derivace definována
7) Lokální extrémy
   Intervaly konvexnosti a konkávnosti
8) Asymptoty

$$y = ax + b$$

$$a = k_{as} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$$

9) Obor hodnot funkce
10) Graf funkce

Příklad: $f: y = x^3 - 6x^2 + 9x$

1) D=R

$f(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x = -(x^3 + 6x^2 + 9x)$ – ani sudá, ani lichá

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = -\infty$

3) průsečík s *x*: $y = 0$

$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

$x = 0 \vee x = 3 \qquad [0,0],[3,0]$

průsečík s *y*: $x = 0$

$y = 0$

$[0,0]$

4) $y' = 3x^2 - 12x + 9$

stacionární body: $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$

5) rostoucí: $y' > 0 \Rightarrow (-\infty,1),(3,+\infty)$ klesající: $y' < 0 \Rightarrow (1,3)$

6) $y'' = 6x - 12$

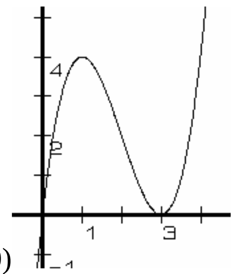
inflexní body: $y'' = 0 \Rightarrow x = 2$

7) $y''_{(1)} = -6$ – lokální maximum [1,4] $y''_{(3)} = 6$ – lokální minimum [3,0]

konvexní: $y'' > 0 \Rightarrow (2,+\infty)$ konkávní: $y'' < 0 \Rightarrow (-\infty,2)$

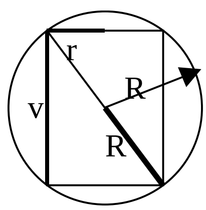
8) $k_{as} = \lim\limits_{x\to\infty} b = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$

9) H=R

10) 

48.4 GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Příklad: Do koule o poloměru *R* vepište válec největšího objemu.



$V = \pi r^2 v$

$r^2 + v^2 = 4R^2 \Rightarrow r^2 = 4R^2 - v^2$

$V = \pi(4R^2 - v^2)v$

$V' = 4\pi R^2 - 3\pi v^2$

$4\pi R^2 - 3\pi v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\tfrac{4}{3}} \cdot R$

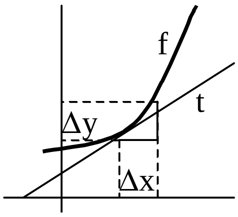
$r^2 = 4R^2 - v^2 \Rightarrow r = \sqrt{4R^2 - \tfrac{4}{3}R^2} = R\sqrt{\tfrac{8}{3}}$

$V'' = -6\pi v$

$V''\left(R\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = -\pi R\sqrt{48} < 0 \Rightarrow$ v tomto bodě je maximum funkce

49 PRIMITIVNÍ FUNKCE, URČITÝ INTEGRÁL

49.1 DIFERENCIÁL FUNKCE



dx – diferenciál argumentu
dy – diferenciál funkce

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

Výpočet absolutních chyb: *dy*

Výpočet relativních chyb: $\frac{dy}{y}$

Příklad: Válec má průměr i výšku $80 \pm 0{,}5$ cm. Jaká bude relativní chyba při výpočtu objemu?

$D=80, \qquad dD = \pm 0{,}5$

$$V = \pi\left(\tfrac{D}{2}\right)^2 \cdot D = \frac{\pi D^3}{4}$$

$$dV = \tfrac{\pi}{4} 3D^2 \cdot dD$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{3dD}{D} = \frac{1{,}5}{80} = 1{,}87\%$$

49.2 NEURČITÝ INTEGRÁL

Primitivní funkce: $F'(x) = f(x)$, *F(x)* je funkce primitivní k *f(x)*

Neurčitý integrál: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$, kde $\int f(x) \cdot dx$ je neurčitý integrál, $f(x) \cdot dx$ je integrant a $F(x) + C$ je primitivní funkce. Integrál je opak derivace.

49.3 ZÁKLADNÍ INTEGRÁLY

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \tfrac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$$

$$\int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int c \cdot dx = c \cdot \int dx = cx + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int e^x \cdot dx = e^x + C$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx + C$$

$$\int c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int f(x) \cdot dx$$

49.4 INTEGRAČNÍ METODY

Substituční metody:

$$\int f(ax+b) \cdot dx = \tfrac{1}{a} \int f(t) \cdot dx = \tfrac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$$

$$t = ax + b$$

$$dt = t' \cdot dx = a \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \int \tfrac{1}{t} \cdot dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

$$t = f(x)$$

$$dt = f'(x) \cdot dx$$

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x) \cdot dx = \int f(t) \cdot dt = F[g(x)] + C$$

$$t = g(x)$$

$$dt = g'(x) \cdot dx$$

Metoda per partes: (po částech)

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)' \cdot dx = \int u'v \cdot dx + \int uv' \cdot dx$$

$$uv = \int u'v \cdot dx + \int uv' \cdot dx$$

$$\int u'v \cdot dx = uv - \int uv' \cdot dx$$

Příklad: $\int x \cdot \cos x \cdot dx = \begin{vmatrix} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{vmatrix} = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 1 \cdot dx =$

$= x \cdot \sin x + \cos x + C$

Příklad: $\int \ln x \cdot dx = \int 1 \cdot \ln x \cdot dx = \begin{vmatrix} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x \cdot \ln x - \int x \cdot \tfrac{1}{x} \cdot dx =$

$= x \cdot \ln x - x + C$

Příklad: $\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \begin{vmatrix} u' = e^x & u = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{vmatrix} = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx =$

$= \begin{vmatrix} u' = e^x & u = e^x \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{vmatrix} = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{2} + C$$

49.5 VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Funkce *f(x)* musí být v intervalu *<a,b>* spojitá.

$$\forall c \in \langle a,b\rangle; a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$$

Při **substituci** musíme přepočítat meze pro *t*:

Příklad: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\cos x\cdot dx = \left|\begin{matrix} t = \sin x & t_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ dt = \cos x\cdot dx & t_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1\end{matrix}\right| = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^2\cdot dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{7}{24}$

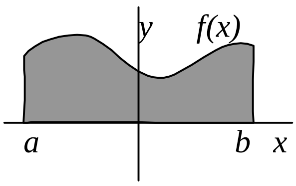
Při metodě **per partes**:

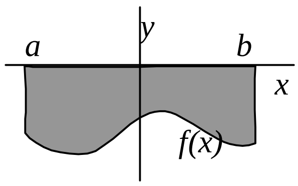
Příklad: $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\cdot dx = \left|\begin{matrix} u' = \sin x & u = -\cos x \\ v = x & v' = 1\end{matrix}\right| = [-x\cdot\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\cdot dx =$

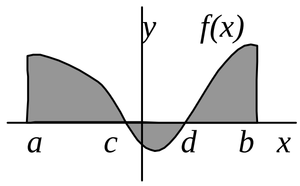
$= [-x\cdot\cos x + \sin x]_0^{\pi} = \pi$

50 UŽITÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU K VÝPOČTU OBSAHŮ ROVINNÝCH OBRAZCŮ A OBJEMŮ ROTAČNÍCH TĚLES

50.1 OBSAH OBRAZCE

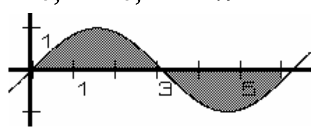




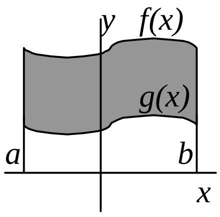


$$S = \int_a^b f(x)\cdot dx \qquad S = -\int_a^b f(x)\cdot dx \qquad S = \int_a^c f(x)\cdot dx - \int_c^d f(x)\cdot dx + \int_d^b f(x)\cdot dx$$

Příklad: Vypočti obsah obrazce vymezeného křivkami: $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2\pi$



$$S = \int_0^{\pi}\sin x - \int_{\pi}^{2\pi}\sin x = [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4$$

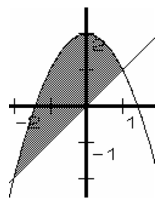


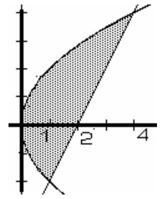
Pro plochu obrazce vymezeného **dvěma křivkami** platí vztah: $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\cdot dx$, tento vzorec platí i v případě, že část plochy leží pod osou *x*.

Příklad: $f: y = 2 - x^2,\ g: y = x$

$2 - x^2 = x \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1$

$S = \int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)\cdot dx = 4{,}5$





Příklad: $f: y^2 = 4x,\ p: 2x - y - 4 = 0$

1) Derivujeme podle x

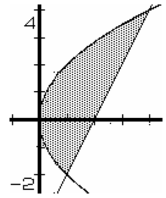
$f: y = \pm 2\sqrt{x},\ p: y = 2x - 4$

Průsečíky: $y^2 = 4x \Rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 4x \Rightarrow x = 1 \vee x = 4$

$$S = 2\int_0^1 2x^{\frac{1}{2}} \cdot dx + \int_1^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 4\right) \cdot dx = 9$$

2) Derivujeme podle y

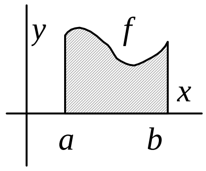
$$f: x = \frac{y^2}{4},\ p: x = 2 + \frac{y}{2}$$



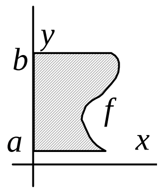
Průsečíky: $x = x \Rightarrow \dfrac{y^2}{4} = 2 + \dfrac{y}{2} \Rightarrow y = -2 \vee y = 4$

$$S = \int_{-2}^{4} \left(2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right) \cdot dy = 9$$

50.2 OBJEMY ROTAČNÍCH TĚLES

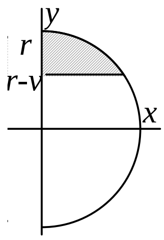


Pro tělesa rotovaná kolem osy x: $V = \pi \int_a^b f^2(x) \cdot dx = \pi \int_a^b y^2 \cdot dx$



Pro tělesa rotovaná kolem osy y: $V = \pi \int_a^b f^2(y) \cdot dy = \pi \int_a^b x^2 \cdot dy$

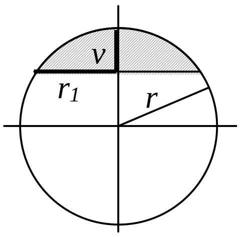
Příklad: Vypočti objem kulové úseče o výšce v, která je částí koule o poloměru r.



Kružnice: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$

$$V = \pi \int_{r-v}^{r} \left(r^2 - x^2\right) \cdot dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-v}^{r} = \pi r v^2 - \pi \frac{v^3}{3}$$

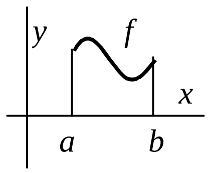
Vzorec pro objem kulové úseče: $V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3$,



kde $r_1 = \sqrt{r^2 - (r - v)^2}$. Po dosazení a úpravách:

$$V = \pi r v^2 - \pi \frac{v^3}{3}$$

50.3 DÉLKA OBLOUKU ROVINNÉ KŘIVKY



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

Příklad: Vypočti obvod kruhu o poloměru r.

kruh: $y^2 + x^2 = r^2 \ \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $\quad y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$$s = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx = 4r \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = 4 \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \cdot dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \frac{x}{r} & t_1 = 1 \\ dt = \frac{1}{r} \cdot dx & t_2 = 0 \end{matrix} \right| = 4r \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \cdot dx = 4r \cdot [\arcsin t]_0^1 = 2\pi r$$
